Zadání 5

Úloha 1. *Spočtěte*

$$\int_C \operatorname{Im} z + \frac{\cos(z^3 - 5 + z)}{e^z}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná hranice trojúhelníka o vrcholech 0, $1-i$ a 2.

Úloha 2. *Spočtěte*

$$\int_C \frac{3|z|}{z} + \frac{e^z}{z^2-16} - \bar{z}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z| = 2$.

Úloha 3. *Určete střed a poloměr mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n}(z+i)^{2n}$.*

Hint. Střed mocninné řady určíme snadno porovnáním s obecným tvarem mocninné řady. Poloměr konvergence zjišťujeme pomocí odmocninového či podílového kritéria pro (absolutní) konvergenci řad (výběr je v zásadě na Vašich preferencích).

Připomenutí: Uvažme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (obecná číselná řada).

- (BUĎ odmocninové): Označme $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}$.
- (NEBO podílové): Označme $L = \lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}$.

Potom

- Pokud $L < 1$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolutně konverguje.
- Pokud $L > 1$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverguje.

Poloměr mocninné řady pak určíme tak, že za b_n vezmeme členy naší řady ze zadání, vybereme si jedno kritérium, spočteme příslušnou limitu L, která obecně může záviset na z, položíme $L < 1$ a vyřešíme, tj. najdeme body z, pro které řada absolutně konverguje. Vždycky musí vyjít kruh a jeho poloměr je hledaný poloměr konvergence.

Pro odmocninové kritérium se může hodit znalost následujících známých limit:

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, obecněji $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P(n)|} = 1$, kde $P(n)$ je polynom v proměnné n
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$, kde $c > 0$ je pevné kladné číslo
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$